

# DS 6 Sciences de l'ingénieur

## PCSI 1

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Il est demandé au candidat de formuler toutes les hypothèses qu'il jugera nécessaires pour répondre aux questions posées.

**La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à **encadrer** les résultats littéraux et **souligner** les résultats numériques.

**Toutes les réponses doivent être inscrites sur le document réponse.**

*Certaines questions sont très calculatoires, vous devez utiliser du brouillon. Utiliser un stylo avec du contraste, pas de crayon papier. Je ne lirai pas vos réponses si je juge que c'est illisible. Attention à vos développements de calculs, ils doivent être bien présentés et lisibles.*

### Contenu du sujet : 2 documents

- Énoncé de 9 pages
- Document réponse de 9 pages

**Durée : 3h**

**Calculatrice AUTORISÉE**



## Partie 1 : Étude fréquentielle moto

Le problème étudie la suspension avant d'une moto BMW K1200S. Cette suspension permet, contrairement aux suspensions classiques à fourche télescopique avant, à la moto de ne pas se pencher en avant (ou « plonger ») lors de la décélération due à un freinage. Ainsi, avec ce type de suspension les fonctions de freinage et de suspension sont découplées vues du pilote.



Moto BMW K1200 S



Armature de la moto

L'objectif est d'étudier la capacité de la moto à absorber les irrégularités de la route. L'équation 1 de la dynamique de la moto linéarisée autour d'un point de fonctionnement est la suivante :

$$M\ddot{x}(t) = -2K(x(t) - y(t)) - v.\dot{x}(t)$$

Avec  $x(t)$  la position du centre d'inertie de la moto par rapport à sa position d'équilibre et  $y(t)$  le profil de la route ressenti par la moto.

On pose :

- $M = 300 \text{ kg}$ , la masse de l'ensemble moto et pilote.
- $K = 10 \text{ N/mm}$ , la raideur du ressort de suspension
- $v = 1000 \text{ N.s/m}$ , le coefficient de frottement visqueux ramené à l'axe des roues

**Question 1 :** Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$  et la mettre sous forme canonique (on considère les conditions de Heaviside respectées). Donner la forme littérale et numérique du gain statique, de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur d'amortissement  $\xi$ .

**Question 2 :** Est-il possible de décomposer  $H(p)$  en produit de fonction du premier ordre ? Justifier votre réponse.

On rappelle l'expression du facteur de résonance  $Q_R = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

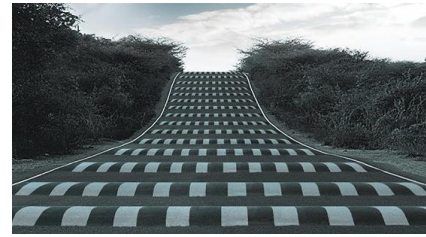
**Question 3 :** Tracer le diagramme asymptotique de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ . Déterminer la valeur du facteur de résonance  $Q_{Rdb}$  en décibel et tracer l'allure du diagramme réel en gain uniquement.

On souhaite limiter le facteur de résonance pour éviter tout risque d'endommagement de la moto, on souhaite obtenir  $Q'_{Rdb} = 6 \text{ db}$ . On considère que la seule grandeur sur laquelle il est possible de jouer est la constante de raideur du ressort de suspension  $K$ .

**Question 4 :** Déterminer analytiquement la nouvelle constante de raideur  $K$  (notée  $K'$ ) permettant d'obtenir le facteur de résonance souhaité. On conservera cette valeur pour la suite de l'étude.

On considère le profil de route ci-contre que l'on peut modéliser par une fonction sinusoïdale de type :

$$y(t) = Y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



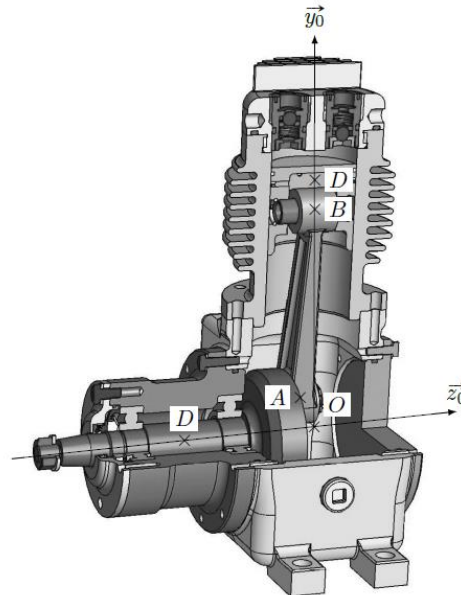
**Question 5 :** Déterminer le profil (c'est à dire l'espacement entre les ralentisseurs) le plus critique pour la moto (en termes de résonance), pour une vitesse de 30km/h puis 130km/h. Il est conseillé d'exprimer dans un premier temps la vitesse de la moto  $v(t)$  en fonction du temps mis à parcourir un ralentisseur (que l'on pourrait appeler période  $T$  en faisant l'analogie avec un signal fréquentiel) et de la distance entre deux ralentisseurs (que l'on pourrait appeler longueur d'onde  $\lambda$ , toujours avec la même analogie).

## Partie 2 : COMPRESSEUR

Certaines machines utilisent de l'énergie pneumatique pour leurs actionneurs. Un micro-compresseur permet de fournir de l'air sous pression (de 5 à 8 bar). Il fonctionne généralement de façon intermittente. L'air sous pression est stocké dans un réservoir. Le compresseur est lui-même entraîné par un moteur électrique.



(a) Vue extérieure du compresseur.



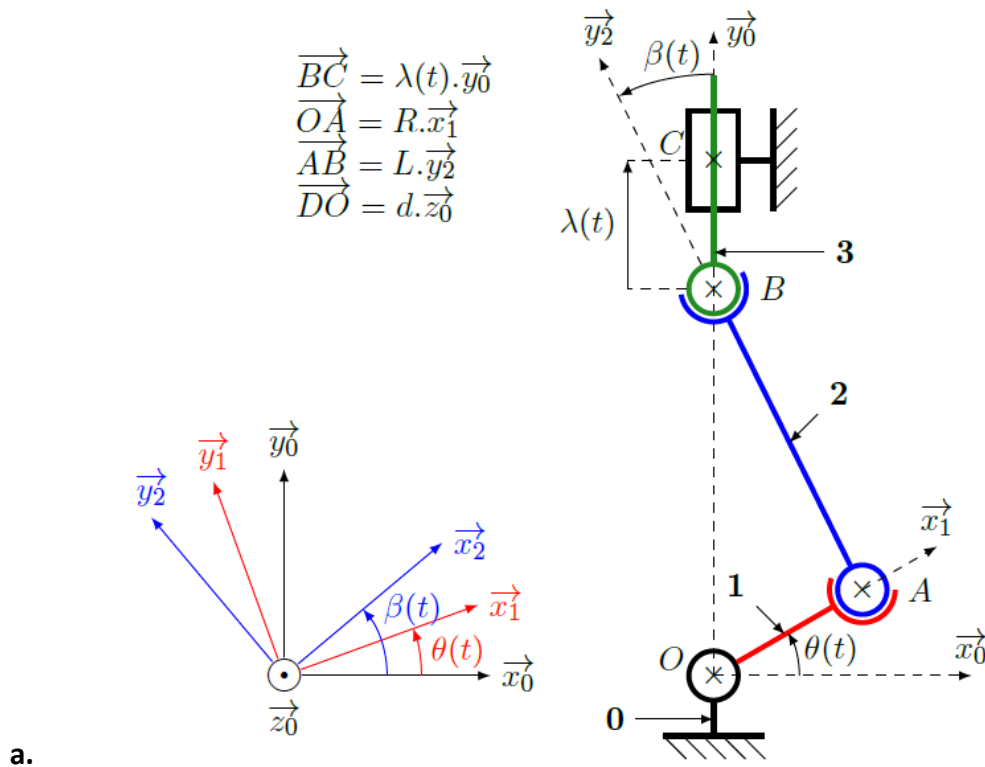
(b) Vue en écorché de l'intérieur du compresseur.

La Figure (a) présente une vue extérieure du compresseur. On distingue l'arbre moteur, lié au moteur électrique et les orifices d'admission et de refoulement d'air.

### Modélisation

Le mécanisme est constitué d'un assemblage de solides indéformables. La modélisation statique reprend le graphe de liaisons et le schéma cinématique pour modéliser le système.

Attention toutefois car il s'agit cette fois de modéliser les actions mécaniques transmissibles : le choix des liaisons peut être différent de celui envisagé pour l'étude des mouvements.



La liaison entre le piston 3 et le bâti 0 est réalisée par un contact cylindre-cylindre et se modélise naturellement par une liaison pivot glissant d'axe  $(C, \overrightarrow{y_0})$ .

Les deux liaisons de part et d'autre de la bielle 2 sont réalisées par des contacts cylindre-cylindre relativement courts par rapport au diamètre, ce qui conduit à les modéliser par des liaisons sphériques de centres A et B.

Pour le guidage de l'arbre 1 par rapport au bâti 0, sans rentrer dans le détail, l'ensemble des deux roulements est modélisé par une liaison pivot d'axe  $(D, \overrightarrow{z_0})$ , bloquant tous les mouvements hormis la rotation suivant la direction  $\overrightarrow{z_0}$ .

**Objectif :** Déterminer le couple moteur  $C_m$  en fonction de la position angulaire du moteur  $\theta$  et de la pression  $p$ .

**Q1 :** Tracer le graphe de structure de ce mécanisme.

**TOUS LES TORSEURS SERONT ECRITS DANS LA BASE  $RO = (XO, YO, ZO)$  !!!!**

**Q2 :** Grâce à la méthode vue en cours lorsque l'exercice n'est pas guidé, **proposer un isolement** pour répondre à la problématique (si plusieurs sont possibles, on privilégiera celui coupant le moins de liaisons car il nous fera apparaître moins d'inconnues statiques). **Réaliser le BAME sur cet isolement.**

**Remarque :** Si jamais vous n'avez pas le même isolement que moi, les questions suivantes sont à adapter. Le but étant de résoudre le système et d'avoir  $C_m$  en fonction de  $p$  et  $\theta$ . Je m'adapterai pour corriger dans ce cas.

**Q3 :** Écrire l'équation (une seule) permettant de relier les grandeurs souhaitées (et certainement des inconnues que nous détermineront par la suite). *AIDE : On ne souhaite pas avoir les inconnues en '01'.*

**Q4 :** A partir de l'équation précédente, isoler un autre solide et réaliser son BAME :

**Q5 :** Écrire les équations permettant de déterminer les 2 inconnues de l'équation de la Q3 ainsi qu'une équation donnant la force de l'air sur 3 en fonction d'une nouvelle inconnue.

**Q6 :** Isoler le solide nécessaire pour déterminer cette nouvelle inconnue introduite en Q5. Faire le BAME.

**Q7 :** Écrire l'équation permettant de déterminer les 2 inconnues introduite en Q5.

**Q8 :** En conclure l'expression de  $C_m$  en fonction de  $\theta$ ,  $p$  et des caractéristiques géométriques du mécanisme.

*Remarque :* Cette méthode de résolution est plus rapide que celle vue en TD avec les 18 équations...

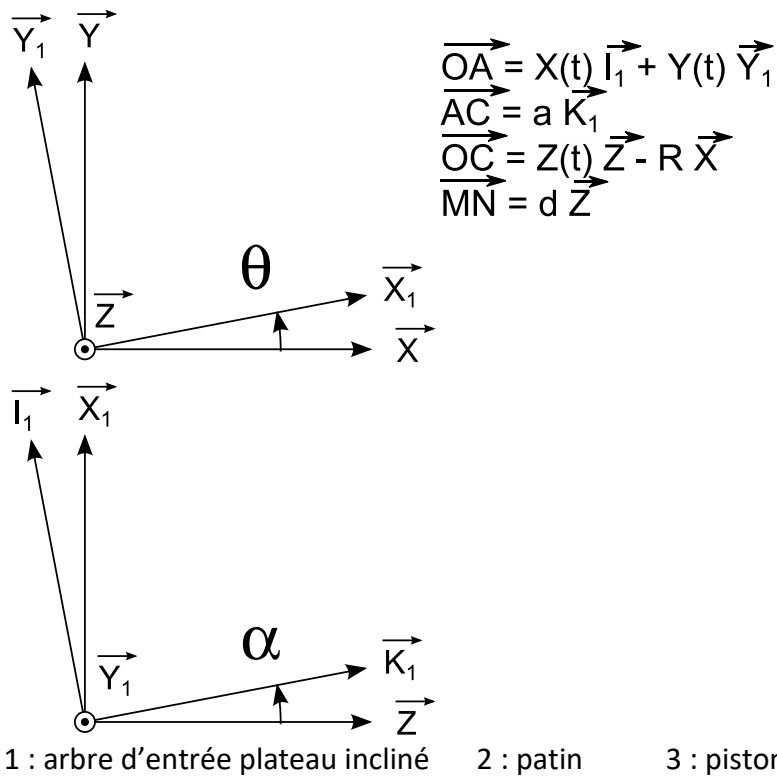
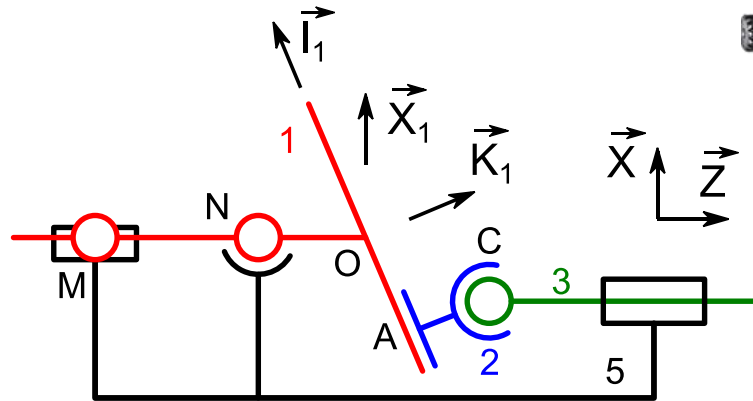
## Partie 3 : POMPE AXIALE

**(La partie Cinématique et Statique sont INDEPENDANTES)**

**La partie STATIQUE rapporte PLUS (+) de points que la partie Cinématique...**

**PARTIE CINEMATIQUE :**

On donne la modélisation suivante :



**Questions :**

**Q1 :** Tracer le graphe des liaisons.

**Q2 :** Poser les torseurs cinématiques associés à chaque liaison en précisant uniquement ce qui est nécessaire.

*AIDE :* Dans les questions suivantes, il faudra bien faire attention au repère utilisé et aux repères dans lesquels sont exprimés les torseurs, il y a trois bases dans cet exercice :

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ et } (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}) \text{ et } (\vec{K}_1, \vec{I}_1, \vec{y}_1)$$

Veillez à utiliser les figures de projection données dans l'énoncé pour passer correctement d'une base à une autre

**Q3 :** Les liaisons entre 0 et 1, en M et N, sont dites liaisons parallèles. Réaliser la fermeture de chaîne adéquate et démontrer que la liaison équivalente est une liaison Pivot dont on précisera le torseur et les éléments de réduction.

**Q4 :** Démontrer par composition de mouvement que la liaison entre 3 et 1 est une liaison ponctuelle dont on précisera les éléments de réduction.

**Q5 :** Expliquer pourquoi on se donne la peine de réaliser ici des liaisons séries ou parallèles plutôt que de réaliser directement leurs liaisons équivalentes.

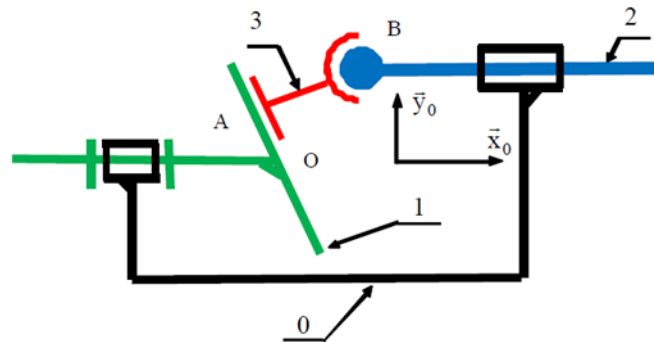
**Q6 :** En s'appuyant sur les questions précédentes, proposer un graphe et un schéma mécanique simplifié.

**Q7 :** Par fermeture cinématique, déterminer la loi entrée sortie :  $V_{30} = f(\omega_{10})$ .

**Q8 :** Reprendre l'étude par une fermeture géométrique et retrouver le résultat précédent on note  $V_{30} = \dot{Z}(t)$ .

**PARTIE STATIQUE**

La figure ci-dessous est la modélisation du mécanisme de transmission de mouvement de la pompe à un piston axial dont on désire étudier la loi entrée-sortie d'un point de vue statique.



Une rotation continue de l'arbre d'entrée à plateau incliné 1 par rapport au bâti 0 est transformée en une translation alternative, en sortie, du piston 2 par rapport au bâti 0, par l'intermédiaire du patin 3.

**On choisit ici la modélisation suivante****Hypothèses :**

- Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est défini sur la figure.
- On définit 2 repères sur (1) :  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $R'_1(O, \vec{x}'_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$  tels que :
  - $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$  et l'angle  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  définit la rotation 1/0.
  - $\vec{z}'_1 = \vec{z}_1$  et l'angle constant  $\delta = (\vec{y}_1, \vec{y}'_1) = (\vec{x}_1, \vec{x}'_1)$  définit l'inclinaison du plateau  
( $\vec{x}'_1$  est la normale au plateau).
- D'autre part, on pose :  $\vec{OB} = x \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_0$  (R est constant) et la longueur  $AB = l$ .
- Toutes les liaisons mécaniques seront supposées parfaites.
- L'action de la pesanteur sera négligée.
- Les actions extérieures, autres que les actions de liaison, sont :

$$\text{○ En entrée : } T_0(\text{moteur} \rightarrow 1) = \begin{cases} \overrightarrow{R(\text{mot} \rightarrow 1)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_O(\text{mot} \rightarrow 1)} = C \cdot \vec{x}_0 \end{cases}$$

$$\text{○ En sortie : } T_0(\text{fluide} \rightarrow 2) = \begin{cases} \overrightarrow{R(f \rightarrow 2)} = F \cdot \vec{x}_0 \\ \overrightarrow{M_B(f \rightarrow 2)} = \vec{0} \end{cases}$$



**Questions de statique :**

**Q1 :** Etudier l'équilibre de 3. En déduire les relations scalaires entre les actions 1→3 et 2→3.

**Q2 :** Etudier l'équilibre de 2. En déduire la relation scalaire entre l'action 3→2 et F.

**Q3 :** Etudier l'équilibre de 1. En déduire la relation scalaire entre l'action 3→1 et C.

**Q4 :** Déduire des résultats précédents la relation  $C = f(F, R, \alpha, \delta)$ .  
Montrer l'évolution de C sur un tour de 1/0.

**Q5 :** Reprendre l'étude précédente, en supposant maintenant que la pompe comporte six pistons dont les axes sont répartis de manière équidistante sur un cylindre de rayon R.  
Quelle est alors la valeur de C ? Montrer son évolution sur un tour de 1/0.

***Fin du sujet***